

Cours : CALCULS INTEGRALES

Avec Exercices de rappels et d'applications et de réflexions avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB **2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)**

CALCULS INTEGRALES

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ l'unité choisie étant le centimètre .

On considère la fonction f définie sur IR par :
 $f(x) = 3$ et on note C sa courbe représentative.
 Soit R la partie du plan limitée par C , l'axe des abscisses , et les droites d'équations :
 $x = -1$ et $x = 2$.

- a) Calculer l'aire A en cm² de R.
- b) Déterminer une primitive F de f sur IR et calculer $F(2) - F(-1)$.
- c)) Déterminer une autre primitive G de f sur IR et calculer $G(2) - G(-1)$.

2) Intégral et primitive.

2.1 Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de la fonction f entre a et b on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ on lit somme $f(x)dx$ de a à b et on l'appelle intégrale de a à b .

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque : 1) Dans l'écriture : $\int_a^b f(t)dt$ la variable t s'appelle une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = [F(x)]_a^b$$

2) Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitive de f sur I

alors : $(\forall x \in I) (F_2(x) = F_1(x) + C) (C \text{ constante})$

Et on aura : $F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + c) - F_2(a) + c$

$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a)$ donc pour le calcul

d'une intégrale, on prend $C = 0$.

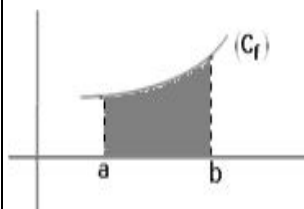
2.2) Interprétation géométrique de l'intégrale.

si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

l'intégrale de a à b de la fonction f représente l'aire

du domaine délimité par :

- L'axe des abscisses
- Les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$
- La courbe de f .



2.3 Propriété : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est

intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

2.4 Exemples :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ 2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Solution : 1) la fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x \mapsto \frac{3}{2} x^2$

Donc : $I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$

2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx = [x^2 + 3x]_0^1 = (1+3) - (0) = 4$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13) $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1)e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[2 \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2$

$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$

$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1$

$I_2 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5}1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$

$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$

$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$

$I_5 = -\frac{1}{2} e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$

$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[\ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$

$I_7 = \ln |e^{\ln 2} + 1| - \ln |e^0 + 1| = \ln |3| - \ln |2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$

$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\ln |e^x - e^{-x}| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I_8 = \ln |e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln |e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$

$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$

$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$

$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$

$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$I_{11} = 2 \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left((\sqrt{3})^3 - 1 \right) = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1)$$

$$12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4} \sin x^{3+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx = 3 \int_1^2 (3x-4)^{-5} dx = \int_1^2 (3x-4)' (3x-4)^{-5} dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1} (3x-4)^{-5+1} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4} (3x-4)^{-4} \right]_1^2 = \frac{1}{-4} (2)^{-4} - \frac{1}{-4} (-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

$$14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx = \left[2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_{14} = \left(2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \pi \right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi + 2}{8}$$

$$16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{(2x+1)'}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |2x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |3| + 1 - \frac{1}{2} \ln |1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1} \ln^{3+1} x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((x-1)^2 \right)' e^{(x-1)^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} (1 - e)$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)} dx = [\ln |1+\ln x|]_1^2$$

$$I_{19} = \ln |1+\ln 2| - \ln |1+\ln 1| = \ln |1+\ln 2| = \ln (1+\ln 2)$$

$$20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 + (\tan x)^2) - 1 \right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$21) = \left[\frac{8}{9} x^9 - 4x + 2 \ln x \right]_1^e = \frac{8}{9} e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Formules importantes : $c \cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$

$$c \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \times \cos a$$

3) Intégral et operation et règles de calculs

Propriété 1 :

Soient f , g et f' des fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

$$1) \int_a^b f'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$2) \int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a)$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(Relation de Chasles)

$$6) \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ (linéarité)}$$

$$7) \int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

Démontrons par exemple la Relation de Chasles f étant une fonction continue sur I , elle admet une primitive sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur I .

Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) \text{ par définition}$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ = F(b) - F(a)$$

L'égalité annoncée est donc vraie.

Exemple1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x-1|dx \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$$

Solution :1) on a $x \in [0, 3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$$

$$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

$$a) \text{si } x \in [-2; -1] \text{ alors : } x(x+1) \geq 0$$

$$\text{donc : } |x(x+1)| = x(x+1)$$

$$b) \text{si } x \in [-1; 0] \text{ alors : } x(x+1) \leq 0$$

$$|x(x+1)| = -x(x+1)$$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)|dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)|dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2+x)dx + \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = 1$$

Exemple2: on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Solution :

$$1) I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ par sommation on trouve:}$$

$$2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ donc : } I = \frac{\pi+2}{8} \text{ et on remplace dans}$$

dans la 1ère équation et on trouve: $\frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc: } J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi-2}{8}$$

Exercice2 :

on pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$

1) Calculer $I + J$ et $I - 3J$

2) en déduire I et J

Solution : 1)

$$I + J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 3}{e^x + 4} + \frac{1}{e^x + 4} \right) dx$$

$$I + J = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 4}{e^x + 4} \right) dx = \left[x \right]_0^{\ln 16} = \ln 16 - 0 = 4 \ln 2$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx - 3 \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x + 3}{e^x + 4} - \frac{3}{e^x + 4} \right) dx$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \frac{(e^x + 4)'}{e^x + 4} dx = \left[\ln |e^x + 4| \right]_0^{\ln 16}$$

$$I - 3J = \ln |e^{\ln 16} + 4| - \ln |e^0 + 4| = \ln |20| - \ln |5| = \ln 20 - \ln 5$$

$$I - 3J = \ln \frac{20}{5} = \ln 4 = 2 \ln 2$$

2) $\begin{cases} I + J = 4 \ln 2 \\ I - 3J = 2 \ln 2 \end{cases}$ par soustraction on trouve:

$$4J = 2 \ln 2 \text{ donc: } J = \frac{\ln 2}{2}$$

Et on remplace dans dans la 1ère équation et on trouve :

$$\frac{\ln 2}{2} + I = 4 \ln 2 \text{ donc: } I = 4 \ln 2 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{7 \ln 2}{2}$$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Solution : 1) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_2^3$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

$$2 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

$$I = \int_0^{\ln 2} |2-e^x| dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} |2-e^x| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} (2-e^x) dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x - 2 dx$$

$$I = \frac{1}{2} [2x - e^x]_0^{\ln 2} + [e^x - 2x]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I = ((2 \ln 2 - 2) + 1) + ((3 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2)) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

Exercice4 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

Solution : 1)

$$\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{18(x-1) - 2(x+1)}{4(x+1)(x-1)} = \frac{18x - 18 - 2x - 2}{4(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{16x - 20}{4(x+1)(x-1)} = \frac{4x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x-5}{x^2-1}$$

2) $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \int_3^5 \left(\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx$

$$= \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{1}{x-1} dx = \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)'}{x-1} dx$$

$$= \frac{9}{2} [\ln |x+1|]_3^5 - \frac{1}{2} [\ln |x-1|]_3^5 = \frac{9}{2} (\ln 6 - \ln 4) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2)$$

$$I = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{9}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{19}{2} \ln 2$$

Exercice5 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1) montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2) en déduire l'intégrale I

Solution : 1) on a : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 \cdot (e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2 \cdot (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix}) \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(e^{4ix} + 4e^{i3x} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

Or on sait que :

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \text{ et } 2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$$

$$\text{Donc : } \cos^4 \theta = \frac{1}{16} ((2 \cos 4x) + 4(2 \cos 2x) + 6)$$

$$\text{Donc : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + 4 \frac{1}{2} \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 4 \frac{1}{2} \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

4) Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$

1) Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

2) Si $(\forall x \in [a; b]); f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$3) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Preuve : 1) Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I . on a : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Et comme $f(x) = F'(x)$ est positive alors F est croissante et par suite $(a < b) F(b) - F(a) \geq 0$

2) On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ et on applique la propriété précédente

3) On a $(\forall x \in [a, b]) : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

En passant à l'intégrale on en déduit :

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|$$

Et par suite : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Remarques : Les réciproques de chacun des points de cette propriété sont fausses.

1) Par exemple : $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la

fonction : $x \rightarrow x^2 - 1$ n'est pas positive sur $[0 ; 2]$: car l'image de 0 est -1 .

2) De même $\int_0^2 1 dx \leq \int_0^2 x^2 dx$ puisque $2 \leq \frac{6}{3}$

mais la fonction $x \rightarrow x^2$ n'est pas toujours Supérieure à 1 sur $[0 ; 2]$.

Exemple1 : Montrer les inégalités suivantes

$$1) \int_1^e \ln x dx \geq 0 \quad 2) \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Solution : 1) on a \ln positive et continue sur le segment $[1; e]$ et $1 \leq e$ donc : $\int_1^e \ln x dx \geq 0$

2) Montrons que : $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

Soit $t \in [0; 1]$ donc $-1 \leq -t^2 \leq 0$ et puisque :

$x \mapsto e^x$ est croissante sur \mathbb{R} alors : $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

Et puisque : $t \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0; 1]$ et

$$0 < 1 \text{ Alors : } \int_0^1 e^{-1} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Exemple2 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{Donc : } \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad \text{Donc : } \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

Exercice6 : soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Solution :1) } u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \end{aligned}$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

$$\text{Et on a : } \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0 \quad \text{car } 0 \leq x$$

$$\text{Donc : } \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc : (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq [x]_0^1$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Théorème et définition :

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans $[a ; b]$.

$$\text{Tel que : } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

Preuve : On a : f est continue sur $[a, b]$ donc $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $m \leq f(x) \leq M$ en passant à l'intégrale :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\text{d'où : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

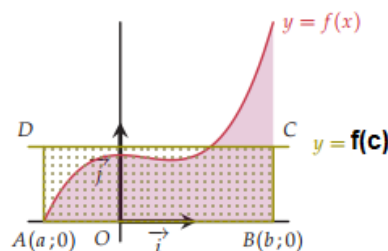
$$\text{Finalement : } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Donc et d'après le T.V.I Il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Interprétation géométrique :

: Dans le cas où f est positive et continue sur $[a ; b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a ; b]$. et L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la

$$\text{définition : } f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$



Exemple : on considère la fonction numérique

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

$$\text{Est : } f(c) = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2}$$

III) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions

primitives :

1-1 Rappel

Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x + c$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
x^r ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$

Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'^n \sqrt{u}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{n}{n+1} \sqrt{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou	$v u + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

La ligne en couleur jaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

1-2 Exemples : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx \quad 2) C = \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Solution : 1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^3 dx$

$$= \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2) C = \int_0^{\sqrt{3}} 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + 1)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{(x^2 + 1)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} (2 - 1) = \frac{2}{3}$$

2) Intégration par partie :

2-1 Introduction :

Considérons l'intégrale $I = \int_1^e f(x) dx$

On ne peut pas trouver une fonction primitive usuelle de la fonction : $x \mapsto x \ln(x)$ donc on ne peut pas calculer I en se basant directement sur le tableau des fonctions usuelles.

Preuve : (d'une propriété)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I .

On sait que ($\forall x \in I$) :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

Par suite :

$$(\forall x \in I) (u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

En passant à l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \int_a^b (u v)'(x) dx - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Or $u \cdot v$ est une fonction primitive de $(u \cdot v)'$ donc :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Cette égalité porte le nom d'une intégration par partie

2-2 Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

2-3 Exemples :

Calculer l'intégrale suivante :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad 2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx$$

Solution : 1) $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

On pose : $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0; \pi]$

donc: $I = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx = [-x \cos x]_0^{\pi} - [-\sin x]_0^{\pi} = \pi$

$$2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \ln 2]$ et u' et v' sont continue sur

$[0; \ln 2]$

Donc : $J = [x e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2}$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx \text{ on a } K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$$

On pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

Donc : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continue sur $[1; e]$

Donc : $K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Remarque :

Pour le choix des fonctions on utilise L. P. E. T

L: logarithme P: polynôme E: exponentielle

T: fonctions trigonométrique

Exercice7 : En utilisant une intégration par partie

calculer : 1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ 2) $J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Solution :

1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ la démarche est la même

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} dx = \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice8 : En utilisant une intégration par

partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx$

$$K = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice9 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

V) INTEGRALE ET SURFACE.

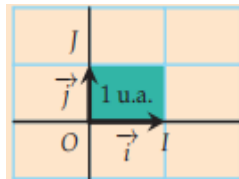
Dans tout ce qui va suivre : Cf est la courbe représentative de la fonction f sur [a, b] dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) DÉFINITION (unité d'aire)

On note I et J les points tels

que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.



2) Activités :

Activité 1: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit f définie sur [1;3] par : $f(x) = 2x + 1$

1) vérifier que f est continue et positif sur [1;3]

2) tracer Cf la courbe représentative de la fonction f sur [1;3]

3) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4) calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

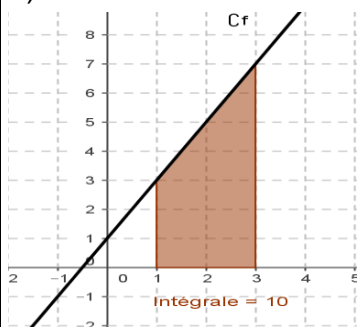
Que peut-on dire ?

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur [1;3]

$x \in [1;3] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x + 1 \leq 7$

Donc : f est continue et positif sur [1;3]

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$A(\Delta_f) = 2 \times 3 + \frac{4 \times 2}{2} = 2 \times 3c^2m + \frac{4 \times 2}{2}c^2m = 10c^2m$

4) $I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3$

$I = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = 12 - 2 = 10$

5) on remarque que : $A(\Delta_f) = \int_1^3 f(x) dx \cdot ua$

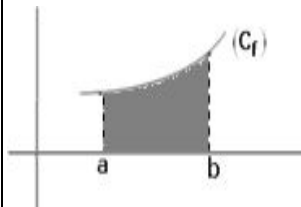
Avec : $u.a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| = 1 \times 1 = 1$

Proposition 1 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

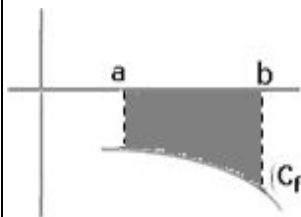
L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

$A(\Delta_f) = \int_a^b f(x) dx \cdot ua$



Remarque : si f une fonction continue et négatif sur un intervalle [a ; b]

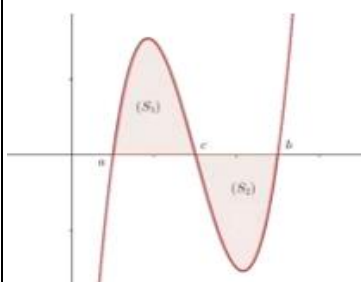
$A(\Delta_f) = -\int_a^b f(x) dx \cdot ua$



Proposition 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$.

est : $A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)| dx \cdot ua$



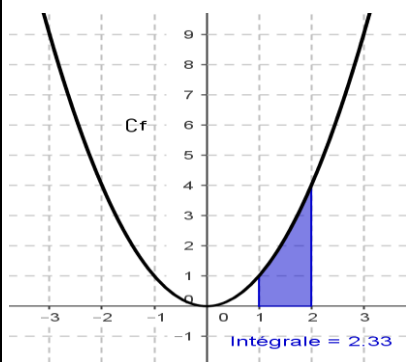
Preuve : Il suffit de déterminer les racines de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ et d'appliquer les propriétés précédentes et la relation de Chasles.

Exemple1 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2$

- 1) tracer C_f la courbe représentative de f
- 2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution :1)



2) f est continue et positif sur $[1; 3]$ on a donc :

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3} \times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3} c^2 m$$

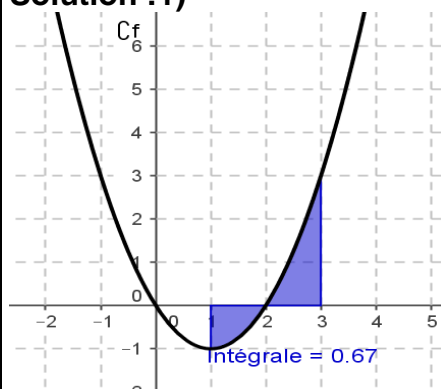
Exemple2 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 2x$

- 1) tracer C_f la courbe représentative de f
- 2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur

$$[1; 3] \text{ donc : } A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx$$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1; 3]$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	$+$

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12c^2 m$$

Exercice10 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f défini par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f ,

l'axe des abscisses et les droites :

$$x = \ln 2 \text{ et } x = \ln 4$$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx$$

On sait que : $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$

Donc : $2 \leq e^x \leq 4$ donc $e^x > 1$ par suite: $1 - e^x < 0$

Donc:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1) dx$$

$$I = [e^x - x]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{\ln 4} - \ln 4) - (e^{\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2 \ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2 \ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

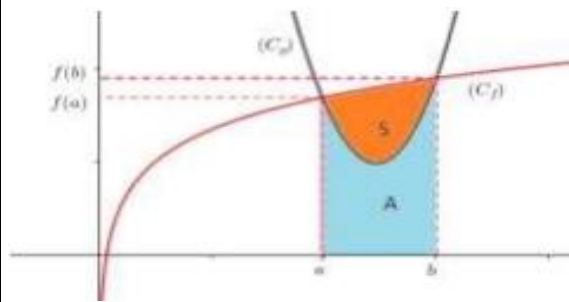
$$\text{Donc : } A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2) c^2 m$$

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit S la surface du domaine limité

par (C_f) ; (C_g) et les droites $x = a$; $x = b$ on a :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad \text{Ua}$$

Preuve :



Il suffit d'étudier les cas :

Par exemple si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$

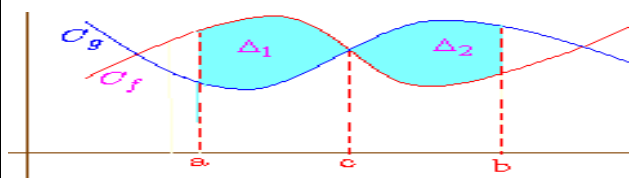
On aura : $S = \int_a^b f(x)dx - A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Et de la même façon on étudie les autres cas.

Remarques :

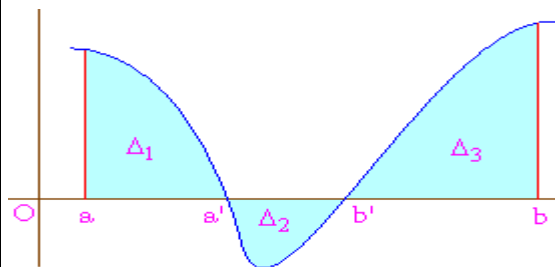
a) Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

b) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^b f(x)dx$$

Exemple : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par

: (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I = \int_1^e |f(x) - g(x)|dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} - e^{-x} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$

Donc: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = [2 \ln |e^x + 1|]_0^{\ln 2}$

Donc :

$$I = 2 \ln |e^{\ln 2} + 1| - 2 \ln |e^0 + 1| = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

Donc : $A = 2 \ln \frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8 \ln \frac{3}{2} cm^2$

Exercice 11: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

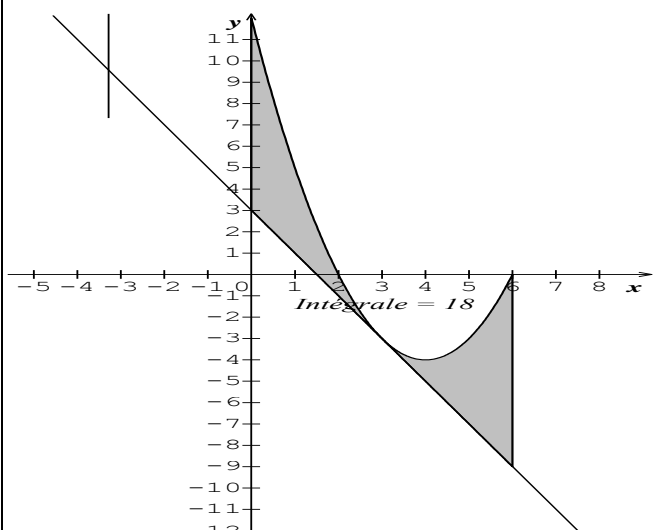
(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe

(C_f) au point $A(3; f(3))$ est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$$f'(x) = 2x - 8 \quad \text{et } f'(3) = -2 \quad \text{et } f(3) = -3$$

$$(D): y = -2x + 3$$



il suffit de calculer :

$$I = \int_0^6 |f(x) - y| dx = \int_0^6 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_0^6 (x+3)' (x+3)^2 dx$$

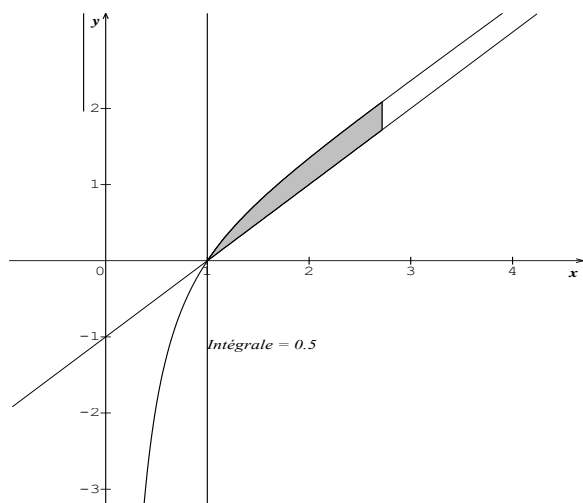
$$I = \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_0^6 = 18 \text{ donc :}$$

$$A = 18 \times (0.5 \text{ cm})^2 = 4.5 \text{ cm}^2$$

Exercice 12: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$ et Soit f défini par : $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x = 1$ et $x = e$



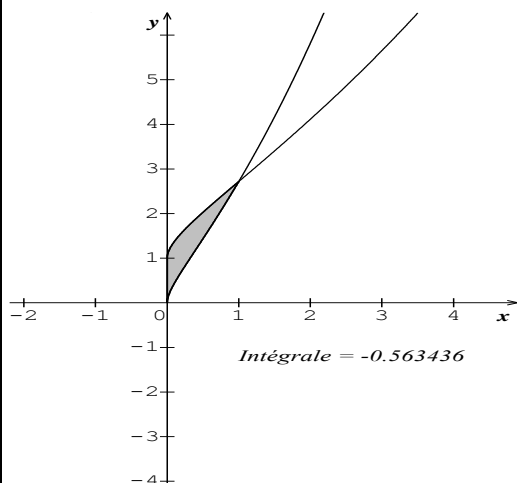
Exercice 13 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et

$g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine

limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x = 0$ et $x = 1$

Solution :



$$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \text{Ua}$$

$$S = \int_0^1 |e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} |1 - \sqrt{x}| dx$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc :

$$0 \leq 1 - \sqrt{x} \text{ donc : } S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx$$

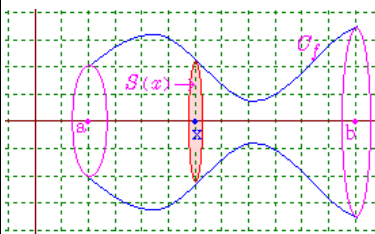
On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$$S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx = \left[(6(\sqrt{x} - 1) - 2x) e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$$S = 6 - 2e \quad \text{Ua}$$

VI) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES Volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe .

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$



La rotation de la courbe (C_f) autour de (Ox)

engendre un solide (S)

un plan $x = \text{fixe}$ coupe le solide (S) suivant un cercle de rayon $f(x)$ donc : $s(x) = \pi(f(x))^2$

Et le volume du solide (S) est : $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des

abscisses engendre un solide de volume

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad \text{u.v (par unité de volume)}$$

Remarque :

si le repere est : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$: $u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\|$

Exemple 1: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré

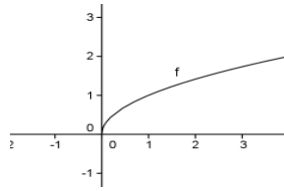
par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \quad \text{et on a :}$$

$$u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\| = 8cm^3$$



Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exemple 2: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3} cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x(e^x - 1) dx$

$$I = \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{x(e^x - 1)} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

$$\text{Donc : } \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \left[x(e^x - x) \right]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - x) dx$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2} \pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$$

Exercice14: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

